# Cálculo I

# Examen V

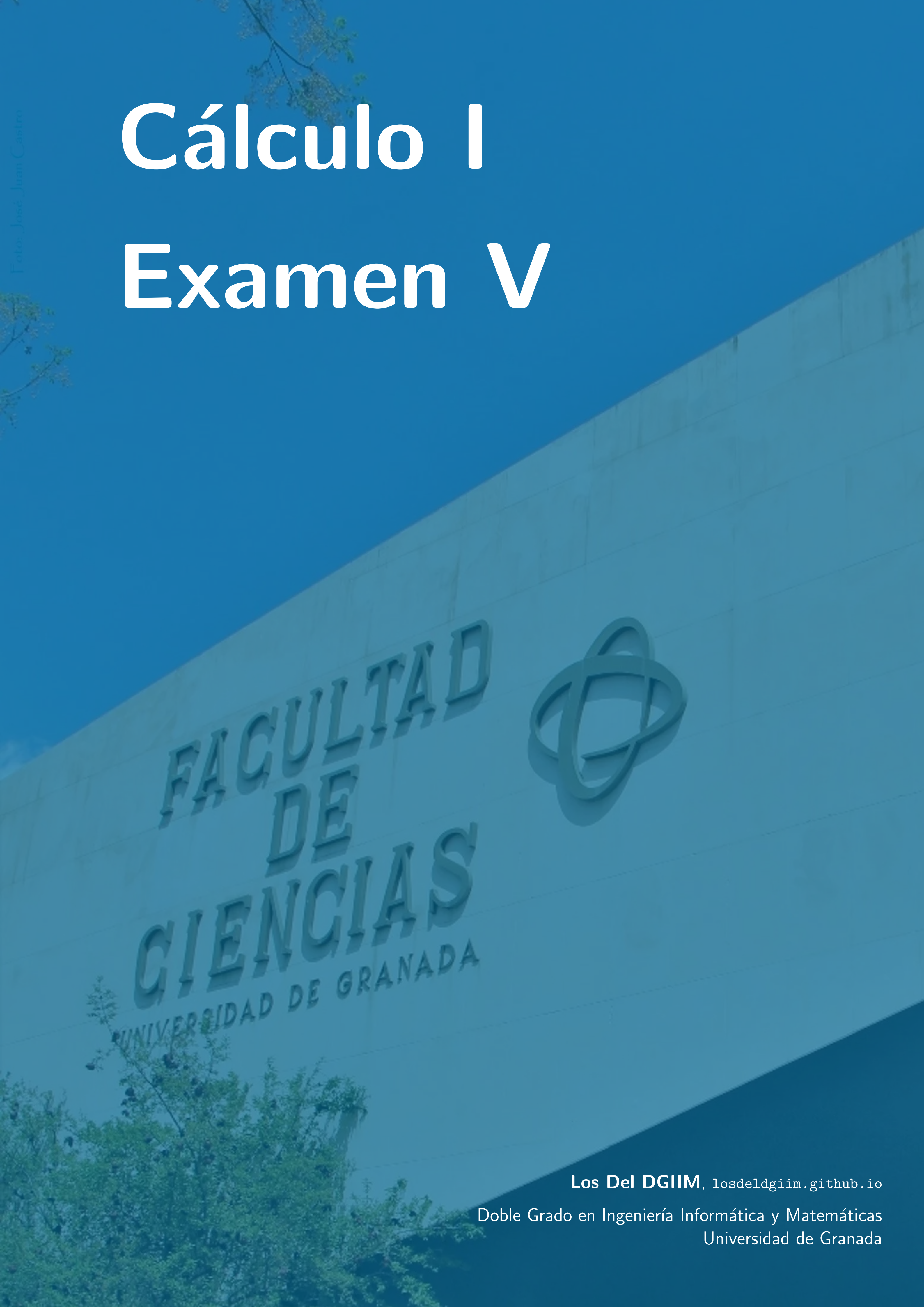


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Cálculo I
# Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Cálculo I.

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Jose Luis Gámez Ruiz.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 19 de enero de 2023.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos)**.** Escribe los siguientes enunciados:

1. Definición de sucesión Convergente:

   Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ se dice "convergente"si $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$ : si $n \in \mathbb{N}, n \geqslant m$, se tiene $|x_n - L| < \varepsilon$.

2. Criterio del cociente para sucesiones:

   Sea $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Si} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \longrightarrow L \Longrightarrow \{\sqrt[n]{a_n}\} \longrightarrow L \qquad (L \in \mathbb{R}_0^+ \text{ o } \text{“}+\infty\text{”})$$

3. Criterio de condensación para series:

   Sean $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, con $\underline{a_n \text{ decreciente}}$. Entonces:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ convergente} \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} 2^n a_{2^n} \text{ convergente}$$

4. Definición de función continua en un punto $a$ de su dominio:

   Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Se dice "f continua en el punto $a$"si

$$\forall \{a_n\} \longrightarrow a \Longrightarrow \{f(a_n)\} \longrightarrow f(a) \qquad (a_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N})$$

5. Teorema de Bolzano-Weierstrass:

   "La imagen, por una función continua, de un intervalo cerrado y acotado, es un intervalo cerrado y acotado"
   En particular, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

**Ejercicio 2** (2 puntos)**.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

1. $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ (1 punto)

   Probaré que $\{x_n\}$ $\underbrace{\text{decreciente}}_{(2)}$ y $\underbrace{\text{minorada por } \sqrt{2}}_{(1)}$

   (1) ¿ $x_n \geqslant \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$ ? (por inducción)

   - $\underline{n = 1}$ $x_1 = 2 \geqslant \sqrt{2}$. Sí
   - $\underbrace{x_n \geqslant \sqrt{2}}_{\textit{hip. de ind}}$ ¿$\Rightarrow x_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$?

$$x_{n+1} \geqslant \sqrt{2} \Longleftrightarrow \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \geqslant \sqrt{2} \Longleftrightarrow x_n + \frac{2}{x_n} \geqslant 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow x_n^2 + 2 \geqslant 2\sqrt{2}x_n$$

$$\Longleftrightarrow x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2} \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x_n - \sqrt{2})^2 \geqslant 0 \qquad \text{Sí}$$

   Luego $x_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ y concluimos (1).

(2) ¿$\{x_n\}$ decreciente ? $\Longleftrightarrow$ ¿$x_{n+1} \leqslant x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$?

$$x_{n+1} \leqslant x_n \Longleftrightarrow \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \leqslant x_n \Longleftrightarrow x_n + \frac{2}{x_n} \leqslant 2x_n \Longleftrightarrow \frac{2}{x_n} \leqslant x_n$$

$$\Longleftrightarrow 2 \leqslant x_n^2 \qquad \text{Sí, por (1)}$$

Así concluimos (2).

Por ser $\{x_n\}$ decreciente y minorada (por $\sqrt{2}$) $\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ converge.
Sea $L = \text{lím}\{x_n\} \Longrightarrow \{x_{n+1}\} \longrightarrow L$ (parcial)

$$\left.\begin{array}{r} x_{n+1} \longrightarrow L \\[2ex] \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \longrightarrow \dfrac{L + \frac{2}{L}}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{del lim)}]{\text{(unicidad}} L = \frac{L + \frac{2}{L}}{2} \Longrightarrow L^2 = 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{2} \\ \cancel{L = -\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

(el "candidato" $-\sqrt{2}$ se descarta, pues $x_n \geqslant \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$)
En conclusión, $\{x_n\} \searrow \sqrt{2}$

2. $\left\{\dfrac{n \log n}{\log(n!)}\right\}$ (1 punto)

Llamamos $a_n = n\log(n)$, $b_n = \log(n!) \nearrow\nearrow +\infty$ (puedo aplicar Stolz)

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{\log(n+1)! - \log(n)} = \frac{\log(n+1) + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)} =$$

$$= 1 + \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)} \xrightarrow{(*)} 1 + 0 = 1$$

Donde en $(*)$ he aplicado que $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \log(e) = 1$ y que $\log(n+1) \to +\infty$

**Ejercicio 3** (3 puntos)**.** Sea la sucesión $\{a_n\}$ verificando $|a_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

1. Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n-1)}{n}$ converge absolutamente.

   La pregunta se reduce a probar si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{|a_n-1|}{n}$ converge. Por "comparación", usando la hipótesis:

$$\frac{|a_n - 1|}{n} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$$

   Así, por ser $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ convergente $\xrightarrow{(crit.comp.)}$ $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n-1)}{n}$ convergente.

2. Estudiar la convergencia absoluta y la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{a_n}{n}$

- La convergencia absoluta es ver si $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
  Comparación (criterio límite) con la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$
  $$\frac{\frac{a_n}{n}}{\frac{1}{n}} = a_n \longrightarrow 1 \in \mathbb{R}^+$$
  Así, por el criterio límite de comparación,
  $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ no converge } \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n} \text{ no converge}$$
  Luego $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ no converge absolutamente
- ¿converge?
  $$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{a_n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n} + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n}$$
  Por el apartado anterior tenemos que $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$ converge absolutamente, luego converge.
  Por el criterio de Leibnitz tenemos que $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge.
  Al ser $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ suma de series convergentes tenemos que converge.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos)**.** Sea $f : [0, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a & (\text{si } x = 0) \\ \dfrac{x^2}{1 + x^2} & (\text{si } 0 < x \leqslant 1) \\ b & (\text{si } x = 2) \end{cases}$$

1. (1 punto) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ es $f$ continua?
   - Continuidad en el punto $0 \in A$
     $$\left.\begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} f \text{ continua en } 0 \iff a = 0$$
   - $f$ continua en cualquier punto de $]0, 1]$ (por el carácter local de la continuidad)
   - Continuidad en el punto $2 \in A$
     2 es un <u>punto aislado</u> del dominio y, por tanto, $f$ es continua en 2 (independientemente del valor de $b$)

Conclusión:

$$f \text{ continua } \iff a = 0$$

2. (1 punto) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ es $f$ monótona?

Observemos que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ es creciente en $]0,1]$.

Así, $f_{|]0,1]}$ es creciente. Para que f creciente en $A$ debe ocurrir que:

$$\begin{array}{lcl} a = f(0) \leqslant f(x)\ \forall x \in ]0,1] & \iff & a \leqslant 0 \\ b = f(2) \geqslant f(1) = \frac{1}{2} & \iff & b \geqslant \frac{1}{2} \end{array}$$

(En ningún caso podrá ser $f$ decreciente)

3. (0.5 puntos) Calcular la imagen de $f$.

$$Im(f) = \{a, b\} \cup f(]0,1])$$

Por el T.V.I. y la monotonía de $f_{|]0,1]}$ sabemos que $f(]0,1]) = ]0, \frac{1}{2}]$, luego

$$Im(f) = \{a, b\} \cup \left]0, \frac{1}{2}\right]$$